

### Chapitre 2 – corrigés

#### Exercice 2.2 : Matrice de passage

$$e_r = \cos\theta e_x + \sin\theta e_y \quad \text{et} \quad e_\theta = -\sin\theta e_x + \cos\theta e_y$$

On exprime la base cylindrique dans la base cartésienne, ce qui donne la matrice de passage définie par  $X_{cyl} = P_\theta X_{cart}$  où  $X_{cart}$  et  $X_{cyl}$  sont les composantes d'un vecteur  $X$ .

$$\begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad P_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que les colonnes de  $P_\theta$  sont les coordonnées de la base cartésienne dans la base cylindrique (et pas l'inverse !).

Inverser  $P_\theta$  revient à changer  $\theta$  en  $-\theta$  ( $P_\theta$  correspond aussi à la rotation d'angle  $-\theta$  autour de  $z$ , son inverse correspond à la rotation d'angle  $\theta$  autour de  $z$ ).

$$\text{On obtient } P_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Ainsi } P^{-1} = P^t \quad \text{et} \quad X_{cart} = P_{-\theta} X_{cyl} \quad (\text{formule 2.17 du cours}).$$

Pour avoir les coordonnées  $X_{cyl}$  du vecteur  $X$  dans la base cylindrique connaissant  $X_{cart} = (3, \sqrt{3}, 5)$ , il faut faire l'opération suivante :  $X_{cyl} = P_\theta X_{cart}$ . On obtient alors  $-3\sin\theta + \cos\theta\sqrt{3} = 0$  car la deuxième coordonnée en cylindrique est nulle par définition, l'angle étant dans la matrice elle-même. Ainsi,  $\theta = \frac{\pi}{6}$  et on calcule alors  $r$  qui vaut  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{3}$  et  $z = 5$ .

$$\text{Le résultat est donc } X_{cyl} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\pi}{6}.$$

Le tenseur  $\sigma$  exprimée dans la base cylindrique définie par  $\theta = \frac{\pi}{6}$  a pour composantes :

$$\sigma_{cyl} = P_\theta \sigma_{cart} P_\theta^t = P_\theta \sigma P_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 5\sqrt{3} & 0 \\ 5\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Le tenseur  $\sigma$  est diagonale dans le repère  $(O, x, y, z)$  tourné de  $\theta = \frac{\pi}{6}$  autour de  $e_z$ .

**Exercice 2.3 : Moment d’inertie d’un disque de hauteur H**

On place un repère cylindrique avec son origine au centre de la surface inférieure du disque et l’axe z selon l’axe de rotation du disque i.e. son axe de symétrie.

$$\mathbf{b} = \rho \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, dV \quad \text{avec } \mathbf{r} = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z \text{ et } \mathbf{v} = r\omega\mathbf{u}_\theta$$

$$\mathbf{b} = \rho\omega \int (r^2\mathbf{u}_z - zr\mathbf{u}_r) \, dV = \left( \rho\omega \int r^2 r \, dr \, d\theta \, dz \right) \mathbf{u}_z - \left( \rho\omega \int zr^2 \mathbf{u}_r \, dr \, d\theta \, dz \right)$$

$$\rho\omega \int zr^2 \mathbf{u}_r \, dr \, d\theta \, dz = 0 \quad \text{car } \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_r(\cos\theta, \sin\theta, 0) \text{ et } \int \mathbf{u}_r \, d\theta = 0$$

$$\mathbf{b} = \left( \rho\omega \int r^2 2\pi r \, dr \, dz \right) \mathbf{u}_z = J\omega\mathbf{u}_z \quad \text{avec } J = \frac{2\pi\rho HR^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

Si le disque est creux de rayon intérieur R1 et de rayon extérieur R2, alors J vaut :

$$J = \frac{2\pi\rho H(R_2^4 - R_1^4)}{4} = \frac{M(R_2^2 + R_1^2)}{2}$$

**Exercice 2.6: Refroidissement par aspersion**

On est en représentation Eulérienne : la tôle défile à la vitesse V sous l’aspersion d’eau. On cherche alors la température dans une fenêtre d’observation positionnée en x.

$$\theta = T - T_0 \quad \text{i.e. } T = \theta + T_0. \quad \text{L’équation s’écrit alors : } \alpha \frac{d^2\theta}{dx^2} + v \frac{d\theta}{dx} + \frac{h}{\rho C_p e} \theta = 0$$

$$\text{Polynôme caractéristique : } \alpha\lambda^2 + v\lambda + \frac{h}{\rho C_p e} = 0 ;$$

Les 2 racines sont réelles si le discriminant est positif i.e. si la vitesse V remplit la condition

$$v \geq \sqrt{\frac{4\alpha h}{\rho C_p e}} = v_{\min}. \quad \text{En effet, si la vitesse est trop faible, le gradient latéral de refroidissement par}$$

eau devient non négligeable devant le gradient axial (selon x) et l’approximation de l’ailette devient caduque. Avec les valeurs présentes,  $v_{\min}$  vaut 4.5 mm/s, la condition est donc remplie.

En posant  $v_{\min}^2 = \frac{4\alpha h}{\rho C_p e}$ , les 2 racines s’écrivent :

$$\lambda_1 = \frac{-v + \sqrt{v^2 - v_{\min}^2}}{2\alpha} = -0.5 / \text{m} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-v - \sqrt{v^2 - v_{\min}^2}}{2\alpha} = -10^5 / \text{m}$$

D’où  $\theta(x) = A\exp(\lambda_1 x) + B\exp(\lambda_2 x)$  avec pour conditions aux limites  $T = T_i$  en  $x = 0$

$$T(x=0) = T_i \quad \text{soit } \theta(x=0) = T_i - T_0 = \Delta T = 885^\circ\text{C} \quad \text{et} \quad A\exp(\lambda_1 \cdot 0) + B\exp(\lambda_2 \cdot 0) = A + B = \Delta T$$

On impose aussi un gradient de température nul en  $x = 0$  :

$$\frac{dT}{dx}(x=0) = \frac{d\theta}{dx}(x=0) = 0 \quad \text{soit } A\lambda_1 \exp(\lambda_1 \cdot 0) + B\lambda_2 \exp(\lambda_2 \cdot 0) = 0$$

$$A \text{ et } B \text{ vérifient donc } A + B = \Delta T \quad \text{et} \quad A\lambda_1 + B\lambda_2 = 0$$

$$\text{il vient : } A = \lambda_2 \Delta T / (\lambda_2 - \lambda_1) \quad \text{et} \quad B = \lambda_1 \Delta T / (\lambda_1 - \lambda_2)$$

Ainsi, la température vaut  $T(x) = T_0 + \frac{(T_i - T_0)}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 \exp(\lambda_1 x) - \lambda_1 \exp(\lambda_2 x))$ . On note que T tend

vers  $T_0$  quand x tend vers l’infini car les deux racines sont négatives.

NB : un gradient de température nul en  $x = L$  est impossible à cause des deux fonctions exponentielles décroissantes....On trouve ici une seconde limite (avec la vitesse) de cette approche.

**Approche Lagrangienne :**

En posant  $x = vt$  ( $x=0$  en  $t=0$ ) on suit le point matériel situé en  $x=0$  au temps  $t = 0$  : sa température vaut au temps  $t$ :

$$T(t) = T(x=Vt) = T_0 + \frac{(T_i - T_0)}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 \exp(\lambda_1 Vt) - \lambda_1 \exp(\lambda_2 Vt))$$

$$\text{et } dT/dt = V \frac{(T_i - T_0)}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 \lambda_1 \exp(\lambda_1 Vt) - \lambda_1 \lambda_2 \exp(\lambda_2 Vt)) = V \lambda_2 \lambda_1 \frac{(T_i - T_0)}{\lambda_1 - \lambda_2} (\exp(\lambda_2 Vt) - \exp(\lambda_1 Vt)) \leq 0.$$

Ce qui donne bien dans notre cas un refroidissement car  $\exp(\lambda_2 Vt) < \exp(\lambda_1 Vt)$  puisque  $\lambda_2 < \lambda_1$   
 On peut retrouver ce refroidissement directement dans l'approche eulérienne ou  $dT/dt$  est alors

$$\text{défini par : } dT/dt = V \cdot \nabla T = V \frac{(T_i - T_0)}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_1 \lambda_2 \exp(\lambda_1 x) - \lambda_1 \lambda_2 \exp(\lambda_2 x)) \leq 0.$$

La température est minimum en sortie de zone d'aspersion (i.e. au temps  $Vt = L$  soit  $t = L/V$ ) et vaut  $21^\circ\text{C}$  avec les données du problème. La figure suivante montre trois profils de température pour 3 vitesses de tirage différentes mais toutes supérieures à  $V_{min}$ .

